Das Ikosaeder

Hulek, Klaus Wolfgang

Veröffentlicht in:
Jahrbuch 1999 der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft, S.29-33

J. Cramer Verlag, Braunschweig

K. HULEK, Hannover

Das Ikosaeder

Braunschweig, 16.04.1999*

1. Die platonischen Körper

Ein *regulärer* (oder *platonischer*) Körper ist ein 3-dimensionaler kompakter, konvexer Polyeder, dessen Seitenflächen alle zueinander kongruente reguläre *n*-Ecke sind. Hiervon gibt es genau 5 Stück, nämlich Tetraeder, Würfel (Hexaeder), Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder, die ihre Namen aus der Anzahl der Seitenflächen ableiten. Diese Tasache war bereits den griechischen Mathematikern bekannt und geht vermutlich auf Theaetetus (415-369 v. Chr.) zurück. In den Elementen von Euklid wird diese Klassifikation in Buch XIII hergeleitet und stellt einen der Höhepunkte dieses Werkes dar.

Plato (427-347 v. Chr.) verwendete die regulären Körper, um in seinem Dialog Timaios zum ersten Mal eine mathematische Theorie physikalischer Prozesse zu versuchen. Er ordnete den vier Körpern Tetraeder, Würfel, Oktaeder und Ikosaeder die Elemente Feuer, Erde, Luft und Wasser zu. Dem Dodekaeder entspricht in dieser Theorie das Universum. Die Seitenflächen der erstgenannten Körper lassen sich aus Dreiecken mit den Winkeln $(\pi/2, \pi/3, \pi/6)$ bzw. $(\pi/2, \pi/4, \pi/4)$ zusammensetzen. Plato benutzt dann die Geometrie dieser Dreiecke, um „chemische Reaktionen'' zwischen den Elementen herzuleiten.

Fast 2000 Jahre später benutzte Kepler die regulären Körper in einem Versuch, die Verhältnisse der Radien der verschiedenen Planetenbahnen zu erklären. Die damals bekannten Planeten waren Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter und Saturn. Kepler betrachtete dann eine Folge konzentrischer Sphären, so daß je zwei benachbarte Sphären einem regulären Polyeder ein- bzw. umbeschrieben sind. Und zwar ordnete Kepler die Polyeder von innen nach außen wie folgt an: Oktaeder, Ikosaeder, Dodekaeder, Tetraeder und Würfel. Legt man den Radius der Umlaufbahn der Erde als 1 fest, so ergeben sich für die Umlaufbahnen von Merkur, Venus, Mars, Jupiter und Saturn die Zahlen 0,43, 0,76, 1,44, 5,26 und 9,16. Dies kommt den tatsächlichen Verhältnissen erstaunlich nahe. Natürlich ist diese Theorie insofern hinfällig, als die Planetenbahnen, wie Kepler selbst entdeckt hat, nicht Kreise sondern Ellipsen sind.

Reguläre Körper können auch in der Natur beobachtet werden, so bei der Kristallbildung oder bei Calcitgerüsten gewisser Algen. Kappt man die Ecken eines Ikosaeders, so entsteht ein Polyeder mit 60 Ecken. Diese Anordnung entspricht in etwa der Geometrie des C_{60}-Moleküls (Croto, Curl und Smalley, Chemie Nobelpreis 1966).

* Vortrag vor der Plenarversammlung der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft

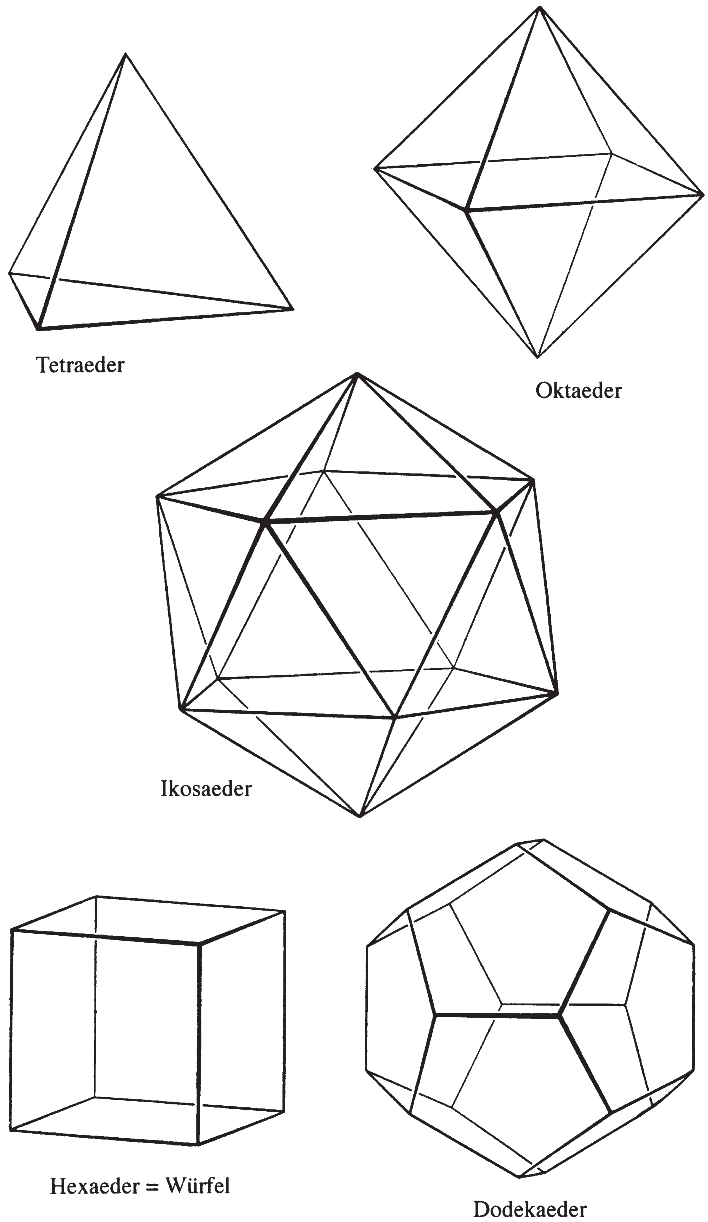

Abb. 1: Die platonischen Körper

2. Das Ikosaeder und die Gleichung fünften Grades

Eine quadratische Gleichung der Form

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a, b, c \text{ reell}, a \neq 0)$$

kann stets durch die Formel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

gelöst werden. Ist $b^2 - 4ac > 0$, so gibt es zwei reelle Lösungen, ist $b^2 - 4ac = 0$, so gibt es eine reelle Lösung und ansonsten zwei zueinander konjugierte komplexe Lösungen. Entsprechende Lösungsformeln existieren für Gleichungen dritten und vierten Grades (Scipio del Ferro, Ferrari, Tartaglia, Cardano). Das gesamte 18. Jahrhundert hindurch haben Mathematiker nach analogen Formeln für Gleichungen fünften und höheren Grades gesucht, waren aber nur in Spezialfällen erfolgreich. Dies hat einen prinzipiellen Grund. Abel(1802-1829) und Galois (1811-1832) haben nämlich gezeigt, daß im allgemeinen eine Gleichung vom Grad $n \geq 5$ nicht explizit durch elementare Rechenoperationen und sukzessives Wurzelziehen gelöst werden kann. Ist man aber bereit, eine transzendente Funktion hinzuzunehmen, so kann man mit Hilfe des Ikosaeders die Gleichung fünften Grades lösen. Dies wird in dem berühmten Buch „Vorlesungen über das Ikosaeder'' von Felix Klein [K] dargestellt. Eine Neuauflage dieses Werkes mit Kommentaren von P. Slodowy [KS] erschien 1993.

Mit Hilfe der stereographischen Projektion kann man die Sphäre S^2 mit der komplexen projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ identifizieren. Man kann das Ikosaeder so in die Sphäre einbeschreiben, daß unter dieser Identifikation die 12 Ecken des Ikosaeders gerade auf die 12 Punkte

$$\{0, \infty, \varepsilon^\kappa(\varepsilon^2 + \varepsilon^3), \varepsilon^\kappa(\varepsilon + \varepsilon^4);\ \kappa = 0, \dots, 4\} \qquad (\varepsilon = e^{2\pi i/5})$$

abgebildet werden. Die *Ikosaedergruppe G* ist die Gruppe aller Drehungen im Raum, die ein Ikosaeder in sich selbst abbilden. Diese Gruppe besteht aus 60 Elementen und ist isomorph zur Gruppe A_5, der alternierenden Gruppe von 5 Elementen. Mittels der stereographischen Projektion operiert G auch auf $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ und damit auf der Algebra der homogenen Polynome in zwei Variablen. Man kann dann zeigen, daß der Ring der invarianten Polynome von drei Polynomen erzeugt wird, und zwar von

$$\begin{aligned} f &= z_1 z_2 (z_1^{10} + 11 z_1^5 z_2^5 - z_2^{10}) \\ H &= -(z_1^{20} + z_2^{20}) + 228(z_1^{15} z_2^5 - z_1^5 z_2^{15}) - 494 z_1^{10} z_2^{10} \\ T &= (z_1^{30} + z_2^{30}) + 522(z_1^{25} z_2^5 - z_1^5 z_2^{25}) - 10005(z_1^{20} z_2^{10} + z_1^{10} z_2^{20}). \end{aligned}$$

Dies sind gerade die Polynome, deren Nullstellen die Eckpunkte (bzw. Seitenmittelpunkte, bzw. Kantenmittelpunkte) des Ikosaeders sind. Diese drei Polynome erfüllen eine Relation, nämlich

$$T^2 = -H^3 + 1728 f^5. \qquad (1)$$

Der Quotient $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}/G$ ist wiederum isomorph zu $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ und die Quotientenabbildung

$$q : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}/\mathrm{G} \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$$

kann explizit durch

$$q(z) = \frac{H(z,1)^3}{1728 f(z,1)^5}$$

beschrieben werden. Die Bedingung $q(z) = u$ entspricht dann der folgenden Gleichung vom Grad 60:

$$((z^{20} + 1) - 228(z^{15} - z^5) + 494z^{10})^3 + 1728u\, z^5(z^{10} + 11z^5 - 1)^5 = 0,$$

die man die *Ikosaedergleichung* nennt. Die Ikosaedergleichung kann nun mit Hilfe von transzendenten Funktionen gelöst werden. Hierzu kann man entweder hypergeometrische Funktionen oder Periodenintegrale verwenden.

Um die allgemeine Gleichung fünften Grades zu lösen, geht Klein dann wie folgt vor. Zunächst kann man eine solche Gleichung mittels einer Tschirnhausentransformation in die Form einer „Hauptgleichung''

$$y^5 + ay^2 + by + c = 0 \qquad (2)$$

bringen. Für die fünf Lösungen $y_1, \ldots, y_5$ dieser Gleichung bedeutet dies dann, daß sie die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{5} y_i = \sum_{i=1}^{5} {y_i}^2 = 0$$

erfüllen. Geometrisch bedeutet dies gerade, daß der Punkt $(y_1 : \ldots : y_5) \in \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$ auf einer Quadrik $Q \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$ liegt. Eine solche Quadrik Q ist eine rationale Fläche und isomorph zu $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Klein gibt mit Hilfe der oben eingeführten Funktionen f und T einen expliziten Isomorphismus

$$\eta : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to Q \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$$

an.

In Abhängigkeit der Koeffizienten a, b, c der Gleichung (2) bestimmt Klein nun einen Punkt $\beta \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ für den er die Ikosaedergleichung $q(z) = \beta$ betrachtet. Diese Gleichung kann mit Hilfe transzendenter Methoden gelöst werden. Ferner bestimmt Klein Zahlen m, n, die durch rationale Funktionen aus den Koeffizienten a,b,c von (2) berechnet werden können. Damit erhält er einen Punkt

$$(y_1 : \ldots : y_5) = \eta((z{:}\ 1), (m : n))$$

aus denen leicht die Lösungen von (2) bestimmt werden können.

3. Ausblick

Das Ikosaeder spielt nicht nur bei der Lösung der Gleichung fünften Grades eine besondere Rolle. So führt etwa die Relation (1) auf die Gleichung

$$x^2 + y^3 + z^5 = 0,$$

welche die Ikosaedersingularität definiert. Hier ergibt sich ein Zusammenhang zur Liealgebra E_8. Ein besonders spektakuläres Objekt, das mit der Iskosaedergruppe auf engste verknüpft ist, ist das *Horrocks-Mumford Bündel* $\mathcal{F}$. Es wurde 1972 konstruiert und ist bisher (abgesehen von trivialen Konstruktionen) immer noch das einzige bekannte nichtspaltende Rang 2 Vektorbündel auf $\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$. Es zeichnet sich dadurch aus, daß es eine Symmetriegruppe der Ordnung 15.000 besitzt. Für nähere Einzelheiten sei auf [HM], [H1], [H2] verwiesen.

Literatur

[HM] G. Horrocks, D.Mumford: A rank 2 vector bundle on $\mathbb{P}^4$ with 15,000 symmetries. Topology **12** (1973), 63–81.

[H1] K. Hulek: Elliptische Kurven, abelsche Flächen und das Ikosaeder. Jber. d. DMV **91** (1989), 69–85.

[H2] K. Hulek: The Horrocks-Mumford bundle. In: Vector bundles in Algebraic Geometry (N.J. Hitchin, P.E. Newstead, W.M. Oxbury eds). LMS Lecture notes **208**, 139–177. Cambridge University Press, Cambridge 1995.

[K] F. Klein: Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade, Teubner Verlag, Leipzig 1884.

[KS] F. Klein: Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade. Herausgegeben mit einer Einführung und mit Kommentaren von P. Slodowy, Birkhäuser Verlag, Basel 1993.

[S] P. Slodowy: Platonic solids, Kleinian singularities and Lie groups. In: Algebraic Geometry, ed. I. Dolgachev, Springer Lecture Notes in Mathematics **1008**, 102–138, Springer Verlag, Berlin 1983.

Prof. Dr. rer. nat. K. Hulek
Institut für Mathematik · Universität Hannover
Welfengarten 1 · D-30060 Hannover